Lösungen zu Übungszettel 7 — Abbildungen

1. Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2 + x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ g(x) = x + 3$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h(x) = x^3$$

gegeben. Berechne:

(a) $(f \circ g)(3) \quad = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6^2 + 6 = 42$

(b) $(g \circ h \circ f)(2) \quad = g(h(f(2))) = g(h(6)) = g(216) = 219$

(c) $(h \circ g)(3) \quad = h(g(3)) = h(6) = 216$

(d) $(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + x + 3 = (x+4)(x+3)$

2. Untersuche die folgenden Vorschriften. Prüfe dabei, ob es sich um Abbildungen handelt und bestimme in diesem Fall das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind bijektiv?

(a) $f_1 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = 7x^2 + 3$
f_1 ist eine Abbildung, Bild von f_1 sind alle reellen Zahlen größer oder gleich 3, f_1 ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) $f_2 : \ \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\}, \ f_2(x) = 2^x$
f_2 ist eine Abbildung, da $2^1 = 2, \ 2^4 = 16, 2^6 = 64$ gilt. f_2 ist ferner surjektiv und injektiv, damit also bijektiv und somit ist das Bild von f_2 gerade $\{2, 16, 64\}$

(c) $f_3 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_3(x) = \frac{1}{x}$
f_3 ist keine Abbildung, da $f_3(0)$ nicht definiert ist.

(d) $f_4 : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$
f_4 ist eine Abbildung, das Bild von f_4 ist $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\}$, denn: $\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{2z+1}{2}} = \dfrac{2z}{2z+1}$. f_4 ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, da die 1 zum Beispiel nicht getroffen wird. f_2 ist aber injektiv, da für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_1 + \frac{1}{2}} = \frac{z_2}{z_2 + \frac{1}{2}} \to z_1(z_2 + \frac{1}{2}) = z_2(z_1 + \frac{1}{2}) \to z_1 z_2 + \frac{1}{2} z_1 = z_2 z_1 + \frac{1}{2} z_2 \to z_1 = z_2$$

(e) $f_5 : \ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$
f_5 ist keine Abbildung, da $f_5(1) \neq f_5(\frac{3}{3})$ gilt.

(f) $f_7 : \ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \to \mathbb{N}, \ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet. f_7 ist eine Abbildung. Sie ist surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{N} : \ \{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, ist aber nicht injektiv, da bspw. $\{1, 2, 3\} und \{2, 3\}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegen. Wegen der Surjektivität ist das Bild von f_7 gerade $\mathbb{N}$.

3. Finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f: M \to N$, sodass gilt:

   (a) Das Bild $f(\{Tabea, Hannes, Malte\})$ ist $\{Mathe\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{Mathe\})$ ist ungleich $\{Tabea, Hannes, Malte\}$. $N := \{Mathe\},\ M := \{Tabea, Hannes, Malte, Stefanie\},\ f(x)$ $Mathe$

   (b) Die Mächtigkeit des Wertebereiches von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich. $M := \mathbb{R},\ N := \mathbb{R},\ f(x) = 0$

   (c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. Hinweis: Schreibe $x \in \mathbb{Q}$ als $x = \frac{a}{b}$. Eine Abbildungsvorschrift kann dann zum Beispiel mit dem größten gemeinsamen Teiler von a und b bestimmt werden. $M := \mathbb{Q},\ N := \mathbb{Z},\ f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{ggt}(a,b)}$. Dies ist wohldefiniert, denn es gilt $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{ggt}(a,b)} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \mathrm{ggt}(a,b)} = \frac{na}{\mathrm{ggt}(na,nb)} = f(\frac{na}{nb})$ und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}$ sind genau dann gleich, wenn es $a, b, n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x_1 = \frac{a}{b} = \frac{na}{nb} = x_2$ gilt.

Lösungen zu Übungszettel 8 — Grundlagen der Linearen Algebra

1. Berechne die folgenden Summen:

   (a)
$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 10 \\ -7 & 8 & 11 \\ 26 & 31 & -14 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 43 \\ 17 & 31 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 23 \\ 31 & 22 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 38 & 13 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (d)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 4 \\ 21 & 9 & 1 \\ 54 & 25 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

3. Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?
   Es soll auffallen, dass die Addition von Matrizen kommutativ ist, während die Multiplikation nicht kommutativ ist.

4. Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Es existiert keine Inverse}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{46} \\ \frac{1}{23} & \frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 20 \\ 9x & - & 3y & = & -3 \end{array}$$

$\rightsquigarrow x = 2,\ y = 7$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \end{array}$$

$\rightsquigarrow x = 3,\ y = -1,\ z = 2$

6. Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{3} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 6 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 3 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Somit müsste $0x + 0y + 0z = 11$ gelten, aber das funktioniert nicht.
Also hat die Gleichung keine Lösung.

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich die Gleichung:

$$x + 2 \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3-x}{2}$$

Die Lösungen der Gleichung sind folglich alle Punkte dieser Geraden.
Also hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

7. Beweise: Eine beliebige 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

   Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

   Hinweis: Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.

Sei $ad - bc \neq 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $a \neq 0$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \frac{c}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_2 \to \frac{a}{ad-bc} \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - b \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) .
\end{aligned}$$

Folglich ist die Matrix invertierbar und es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Falls $a = 0$ (diese Fallunterscheidung ist notwendig, da sonst oben durch Null geteilt wird), vertausche am Anfang der Umformungen die erste und zweite Zeile und gehe analog vor:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} .$$

Allgemein gilt unabhängig vom Wert für a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$