

# Abbildungen

Philip Blache, Oktober 02, 2025

# Outline

Erste Definitionen

Komposition von Abbildungen

Injektivität und Surjektivität  
Anwendung - Messen von Unendlichkeit

# Abbildungen

## Definition 8.1: Abbildung

Seien  $M$  und  $N$  nicht-leere Mengen. Eine **Abbildung**  $f$  von  $M$  nach  $N$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in M$  genau ein  $y = f(x) \in N$  zuordnet.

Schreibe:  $f : M \rightarrow N$ .

Ist  $f$  reellwertig – gilt also  $N \subseteq \mathbb{R}$  – so heißt  $f$  auch **Funktion**.

## Definition 8.2: Definitionsbereich und Wertevorrat

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann heißt  $M$  der **Definitionsbereich** und  $N$  der **Wertevorrat** von  $f$ .

## Bild und Urbild

### Definition 8.3: Bild und Urbild

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung.

Für  $S \subseteq M$  heißt die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das **Bild** von  $S$  unter  $f$ . Für das Bild von  $M$  unter  $f$  spricht man auch kurz nur vom Bild von  $f$ .

Für  $L \subseteq N$  heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das **Urbild** von  $L$  unter  $f$ .

# Komposition

## Definition 8.4: Komposition

Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : S \rightarrow M$  Abbildungen. Die **Komposition**  $f \circ g$  von  $f$  und  $g$  ist die Abbildung

$$f \circ g : S \rightarrow N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

# Injektivität

## Definition 8.5: Injektivität

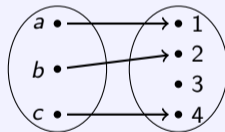
Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **injektiv**, falls für alle  $x_1, x_2 \in M$  gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Werden also zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet, so müssen diese Elemente schon gleich gewesen sein.

Alternative Formulierung:

Für alle  $y \in N$  existiert *höchstens* ein  $x \in M$ , sodass  $f(x) = y$  gilt.



# Surjektivität

## Definition 8.6: Surjektivität

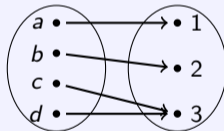
Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Das Bild und der Wertevorrat von  $f$  müssen also übereinstimmen.

Alternative Formulierung:

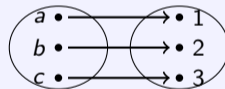
Für alle  $y \in N$  existiert *mindestens* ein  $x \in M$ , sodass  $f(x) = y$  gilt.



# Bijektivität

## Definition 8.7: Bijektivität

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.





## Messen von Unendlichkeiten

### Definition 8.8: Abzählbarkeit von Mengen

Eine Menge  $M$  heißt **höchstens abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung  $f$  von  $M$  nach  $\mathbb{N}$  gibt.

Existiert keine solche Abbildung, dann ist  $M$  **überabzählbar**.

Existiert sogar eine bijektive Abbildung  $g$  von  $M$  nach  $\mathbb{N}$ , so heißt  $M$  **abzählbar** und es gilt  $\#M = \infty$ .

## Feedback

- ▶ Wir bitten um Feedback!

